Arnaud Hirtz
Analyse DEUG 2
Université de Haute Alsace

Intégrales impropres et généralisées

Exercice 1 *Déterminer la nature de* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 2 *Déterminer la nature de l'intégrale* $I(r) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^r} dx$ *selon la valeur du réel* r.

Exercice 3 *Soit* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$.

1. *Déterminer la nature de* I.
2. *Calculer* I *en utilisant le changement de variable* $\sqrt{1-x} = t$.

Exercice 4 *Déterminer la nature de* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^{-x}} dx$.

Exercice 5 *Déterminer la nature de* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} dx$.

Exercice 6

1. *Déterminer la nature de* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$.
   (a) *En intégrant par parties, montrer que* $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ *converge.*
   (b) *En déduire la nature de* $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} dx$.

Exercice 7 *Soit* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

1. *Déterminer la nature de* I.
2. *Montrer que* $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^1 x^k \ln x dx \right) + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} \ln x dx$.
3. *Montrer que* $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1-x} \ln x dx = 0$
4. *Calculer* I.